ENS de Lyon — Graphes aléatoires
Master 1 Mathématiques 2016-2017 — E. Baur & M. Maazoun

TD $\mathbb{1}$: Introduction, premier et second moment

Exercice 1. *Monotonie*

Définir les propriétés de graphes suivantes. Sont-elles croissantes ? décroissantes ?

1. Être un arbre
2. Être une forêt
3. Contenir une copie du carré C_4
4. Avoir une composante connexe de taille $\leq C$ pour $C > 0$
5. Avoir un chemin induit de longueur 5
6. Contenir un graphe stable induit de taille 10
7. Être eulérien

Exercice 2. *Second moment et second moment fort (exo du cours)*

1. Démontrer l'inégalité suivante, pour X une variable aléatoire positive :

$$\mathbb{P}\left(X=0\right) \leq 1 - \frac{E[X]^2}{E[X^2]} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{E[X^2]}.$$

2. Comparer avec l'inégalité obtenue par Bienaymé-Tchebychev. Est-ce bien différent en pratique ?
3. Que dire de $\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}$ quand $\frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{\mathbb{E}[X_n]^2} \to 1$?

Exercice 3. *Premier entraînement*

Trouver un seuil pour l'existence de triangles dans $G_{n,p}$.

Exercice 4. *Rebelote*

1. Donner une condition équivalente à $\mathrm{diam}(G_{n,p}) > 2$ du type « Il existe des sommets tels que ... ».
2. En déduire un seuil étroit pour $\mathrm{diam}(G_{n,p}) \leq 2$. Un seuil étroit pour une propriété de graphes croissante $\mathcal{P}$ est une fonction $p^*(n)$ telle que pour $\varepsilon > 0$,

$$\text{si } p \geq (1+\varepsilon)p^*, \text{ alors } \mathbb{P}(G_{n,p} \in \mathcal{P}) \to 1,$$
$$\text{si } p \leq (1-\varepsilon)p^*, \text{ alors } \mathbb{P}(G_{n,p} \in \mathcal{P}) \to 0.$$

Exercice 5.

Donner les lois du degré d'un sommet uniforme dans $G_{n,p}$ et $G_{n,m}$.

Exercice 6.

1. Démontrer $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$
2. Démontrer la formule suivante et déduire un équivalent quand $n \to \infty$ de $\binom{n}{k}$

$$\frac{n^k}{k!}\left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right) \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}.$$

Exercice 7. *Un peu d'Histoire*

Un graphe est k-colorable si on peut assigner à chaque sommet une couleur parmi $\{1, \dots, k\}$ telle que il n'y ait pas deux fois la même couleur le long d'une arête. Une des premières applications des graphes d'Erdős-Rényi a été la démonstration de ce théorème par Erdős en 1959 :

Pour tout k et g, il existe un graphe qui ne contient pas de cycle de longueur $< g$ et qui n'est pas k-colorable.

Pour démontrer ce théorème on étudie $G = G_{n,p}$ avec $p = n^{(1-g)/g}$.

1. Montrer qu'avec grande probabilité, G ne contient aucun stable induit de taille $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$.
2. Montrer qu'avec grande probabilité, G contient moins de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cycles de longueur $< g$.
3. (Question déterministe !) Montrer que s'il existe un graphe G qui ne contient moins de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cycles de longueur $< g$ et aucun stable induit de taille $\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$, alors on peut construire un graphe G' qui ne contient aucun cycle de longueur $< g$ et aucun stable de taille $\lceil \frac{|G'|}{k} \rceil$.
4. Montrer qu'alors G' n'est pas k-colorable. Conclure.

Exercice 8. *Supplément*

Du plus facile au plus difficile.

1. Trouver un seuil pour l'existence d'une copie de K_4 dans $G_{n,p}$.
2. Montrer que dans $G_{n,p}$, $p = \frac{c}{n}$, avec grande probabilité :
   (a) il n'y a pas de sommet qui appartient à deux triangles différents,
   (b) il y a un chemin induit de taille $\lfloor \sqrt{\log(n)} \rfloor$,
   (c) il y a un sommet de degré $\lfloor \sqrt{\log(n)} \rfloor$.