Graphes aléatoires
E. Baur & M. Maazoun

TD 10 : Lois limites - 1 v2

Exercice 1. *Théorème de Prokhorov*

Théorème. (Prokhorov) Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilité sur un espace polonais E qui est *tendue*, c'est à dire que $\forall \epsilon, \exists A$ compact t.q. $\forall n, \mu_n(E \setminus A) \leq \epsilon$. Alors $(\mu_n)_n$ est relativement compacte dans l'espace des lois de probabilité sur E muni de la convergence étroite.

On se propose de montrer ce théorème pour $E = \mathbb{R}$. Soit une suite de fonctions de répartition $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer qu'il existe une sous-suite F'_n et une fonction croissante $G : \mathbb{Q} \to [0,1]$ telle que $F'_n(x) \to G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
2. On définit $F(x) = \inf\{G(y), y \in \mathbb{Q}, y > x\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. F est automatiquement croissante et continue à droite. Montrer que si F est continue en $x \in \mathbb{R}$, alors $F'_n(x) \to F(x)$.

A ce stade on pourrait croire qu'on a terminé, mais F n'est pas nécessairement une fonction de répartition : il est possible que $F(-\infty) > 0$ et $F(+\infty) < 1$. En réalité on a montré la convergence *vague* vers une mesure de masse totale $F(+\infty) - F(-\infty)$.

3. Montrer qu'avec l'hypothèse de tension on a $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$ et conclure.

Exercice 2. *Distances entre lois de probabilité*

On considère les distances suivantes sur l'espace des lois de probabilité sur $\mathbb{R}$: variation totale, Kolmogorov et Wasserstein.

$$d_{VT}(\mu,\nu) = \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mu(A) - \nu(A)|$$
$$d_K(\mu,\nu) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mu(]-\infty,x]) - \nu(]-\infty,x])|$$
$$d_W(\mu,\nu) = \sup_{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ 1-Lip}} |\mu(f) - \nu(f)|$$

1. Montrer ce diagramme d'implications entre les différentes convergences :

$$\begin{array}{rcl} (VT) \implies & K & \implies (d) \\ & W & \implies (d) \end{array}$$

2. Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\delta_n + (1-\frac{1}{n})\delta_0)_n$ converge sauf pour Wasserstein.
3. Montrer que la suite $(\delta_{1/n})_n$ converge pour W et (d) mais pas pour K et VT.
4. Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{i/n})_n$ converge sauf en variation totale.

Remarque : on peut montrer que si on considère une suite de mesures à même support compact, $(d) \iff W$. On peut aussi montrer que si on considère une limite qui a une fonction de répartition continue, $(d) \iff K$.

Exercice 3. *Distance de Lévy*

On définir la distance de Lévy entre des fonctions de répartition réelles :

$$L(F,G) = \inf\{\epsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, G(x-\epsilon) - \epsilon \leq F(x) \leq G(x+\epsilon) + \epsilon\}.$$

Montrer qu'elle métrise la convergence en loi.

Remarque : on peut généraliser à tout espace métrique séparable E avec la distance de Lévy-Prokhorov :

$$d(\mu,\nu) = \inf\{\epsilon > 0 : \forall A \in \mathcal{B}(E), \mu(A) \leq \nu(B(A,\epsilon)) + \epsilon,\ \nu(A) \leq \mu(B(A,\epsilon)) + \epsilon\}.$$

Exercice 4. *Méthode de Stein - loi biaisée par la taille*

Soit X une variable aléatoire positive, de carré intégrable. Posons $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. On suppose que $\mu > 0$, et qu'on a construit sur le même espace de probabilité une variable aléatoire X^s dont la densité par rapport à X est

$$\frac{\mathbb{P}(X^s \in dx)}{\mathbb{P}(X \in dx)} = \frac{x}{\mu}.$$

On dit que X^s a la loi de X biaisée par la taille.

Posons $W = (X-\mu)/\sigma$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Le cours donne

$$d_W(W,Z) \leq \sup_f |\mathbb{E}[Wf(W) - f'(W)]|,$$

où le sup porte sur les fonctions f telles que $||f||_\infty, ||f'||_\infty, ||f''||_\infty \leq 2$. On cherche à remplaçer l'estimation du membre de droite par une estimée portant sur le couplage entre X et X^s.

1. Vérifier qu'on a bien défini une densité de probabilité. Calculer $\mathbb{E}[X^s]$, et plus généralement $\mathbb{E}[H(X^s)]$ pour toute fonction $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
2. Déduire que
$$\mathbb{E}[Wf(W)] = \frac{\mu}{\sigma}\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X^s-\mu}{\sigma}\right) - f\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right].$$
3. Appliquer à f l'égalité de Taylor-Lagrange pour montrer que
$$|\mathbb{E}[Wf(W)] - \mathbb{E}[f'(W)]| \leq \left|\mathbb{E}\left[f'(W)\left(1 - \frac{\mu}{\sigma^2}(X^s - X)\right)\right]\right| + \frac{\mu}{2\sigma^3}||f''||_\infty \mathbb{E}[(X^s-X)^2].$$
4. Majorer le premier terme par $\frac{\mu}{\sigma^2}||f'||_\infty \mathbb{E}\left[\left|Y - \mathbb{E}\,Y\right|\right]$, où $Y = \mathbb{E}[X^s - X|\mathcal{F}]$ avec $\mathcal{F}$ une tribu qui contient X. Utiliser Cauchy-Schwarz pour conclure :
$$|\mathbb{E}[Wf(W)] - \mathbb{E}[f'(W)]| \leq \frac{2\mu}{\sigma^2}\sqrt{\mathrm{Var}\,Y} + \frac{\mu}{\sigma^3}\mathbb{E}[(X^s-X)^2].$$

Exercice 5. *Nombre de sommets isolés asymptotiquement normal*

On se place dans $G = G_{n,p}$ avec $p = 1/n$. On pose X le nombre de sommets isolés, et on écrit $X = \sum_{i=1}^n X_i$, avec $X_i = \mathbb{1}\{i \text{ isolé}\}$. Soit I un sommet choisi uniformément dans $[n]$, indépendamment de G et X^s le nombre de sommets isolés obtenu en effaçant toutes les arêtes incidentes à I. On pose $W = (X - \mu)/\sigma$, où $\mu = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ comme avant. On veut montrer que W est asymptotiquement normale avec l'exercice précédent.

1. Trouver l'asymptotique de μ et σ^2 quand $n \to \infty$.
2. Montrer que X^s a bien la loi de X biaisée par la taille. (Indication : pour toute fonction H et $i \in [n]$, $\mathbb{E}[H(X)|X_i = 1] = \mathbb{E}[H(X^s)|I = i]$.)
3. Montrer que $X^s - X = D_I + (1 - X_I)$ où pour $i \in [n]$ on note D_i le nombre de sommets de degré 1 reliés à i. Montrer que $\mathbb{E}[(X^s - X)^2] = O(1)$.
4. Calculer $Y = \mathbb{E}[X^s - X|G]$. Déduire que $\mathrm{Var}(Y) \leq \frac{2}{n^2} (\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n D_i) + \mathrm{Var}(X)) = O(1/n)$.
5. Conclure.