Corrigé TD 2 : Phase sous-critique

1 Exercice 1

D'après le cours on sait qu'avec grande probabilité, comme $m \ll n$, $G_{n,p}$ est une forêt. Maintenant, si $\alpha \in]\frac{k-2}{k-1}, \frac{k-1}{k}[$, on sait, toujours d'après le cours, qu'il y a des composantes arbre de taille k, mais pas de taille $k+1$, avec grande probabilité. Combiner tout ça donne qu'avec grande probabilité la taille de la plus grande composante est k. Pour $\alpha = \frac{k-2}{k-1}$, on ne sait pas ce qu'il se passe.

2 Exercice 2

Refait en mieux dans le TD4, Exercice 2.

3 Exercice 3

Fait en cours plus précisément dans la preuve de la Proposition 6.

4 Exercice 4

1. (a) On montre d'abord que dans un arbre il existe une feuille (sommet de degré 1). En effet, si tous les sommets étaient de degré ≥ 2, on pourrait construire un chemin injectif infini : étant donné $x_1, \ldots, x_i$, on prend x_{i+1} un voisin de x_i qui n'est pas x_{i-1}. La condition d'acyclicité garantit que x_{i+1} n'est pas non plus un des $x_1, \ldots, x_{i-2}$. Ceci est absurde.
   Maintenant on démontre la relation $|E| = |V| - 1$ par récurrence sur le nombre de sommets. Si $|V| = 1$, $|E| = 0$ et la relation est montrée. Pour l'hérédité, soit un arbre, on retire une feuille et son unique arête incidente, il reste un arbre avec $|V| - 1$ sommets et donc $|V| - 2$ arêtes par hypothèse. D'où $|E| = |V| - 1$.
   On passe à une forêt en sommant sur les composantes connexes.

   (b) Si on a un enracinement, on oriente chaque arête selon le sens dans lequel elle est parcourue par un chemin vers la racine. Cette orientation est existe, car si on a $e = (x, y)$, soit le chemin de x à la racine, soit le chemin de y à la racine contient e (autrement on aurait un cycle). Elle est unique car sinon on aurait deux chemins différents vers la racine et donc un cycle. La racine est alors l'unique point qui a un degré sortant nul.

Réciproquement, muni d'une orientation, on définit la racine comme l'unique sommet de degré sortant nul. Il est bien défini sinon on pourrait créer un chemin infini. Pour l'unicité, considérons le chemin entre deux racines $x \leftarrow \cdots \rightarrow y$. Il doit y avoir à un moment un sommet avec $\leftarrow\rightarrow$, ce qui est interdit. Enfin, l'orientation originale est bien le sens d'un chemin parcouru vers la racine, puisqu'on obtient un tel chemin en successivement l'unique arête sortante.

2. Il faut bien noter maintenant qu'une forêt orientée est un ensemble acyclique d'arêtes orientées. Une suite croissante de forêts orientées est donc forcément "compatible pour l'orientation". On ajoute des arêtes sans changer le sens des anciennes (et en laissant vrais les axiomes de forêts orientées.) Noter aussi que le nombre de sommets reste n, et qu'un sommet isolé est un arbre dans la forêt, arbre composé d'une unique racine.
   (a) Il y a nt_n choix pour E_{n-1}, puis $(n-1)$ choix d'arête à enlever pour obtenir E_{n-2}, puis $(n-2)$ choix ... Ceci donne $a_n = n!t_n$.
   (b) Connaissant E_i, une nouvelle arête peut avoir n'importe quel sommet pour destination (n choix), mais sa source ne peut être qu'une racine qui n'est pas dans la même composante connexe que la destination ($n-i-1$ choix).
   On déduit $a_n = n^{n-1}(n-1)!$, d'où le résultat.

5 Exercice 4

L'Exercice 2 du TD4 travaille directement sur le cas particulier des sommes de n Bernoulli de paramètre c/n et fournit des résultats plus précis. Néanmoins voici le corrigé par souci d'exhaustivité.

1. Il suffit d'appliquer ensuite à $X_i - \mathbb{E}[X_i]$. La valeur de σ^2 n'est pas changée.
2. $\mathbb{P}(S \geq t) = \mathbb{P}(e^{\lambda S} \geq e^{\lambda t}) \leq \mathbb{E}[e^{\lambda S}]e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}]$.
3. $$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}[X_i^k] = 1 + 0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}[X_i^k] \\ \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}[X_i^2] = 1 + (e^{\lambda} - \lambda - 1)\sigma_i^2.\end{aligned}$$
4. On déduit $\mathbb{P}(S \geq t) \leq \exp((e^{\lambda} - \lambda - 1)\sigma^2 - \lambda t)$ en combinant 2 et 3 et utilisant l'inégalité $1 + x < e^x$. On dérive en λ et on voit que la borne est minimale pour $(e^{\lambda} - 1)\sigma^2 - t = 0$, càd $e^{\lambda} = 1 + t/\sigma^2$.
   La borne devient
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \geq t) &\leq \exp((1 + t/\sigma^2 - \log(1 + t/\sigma^2) - 1)\sigma^2 - t\log(1 + t/\sigma^2)) \\ &= \exp(t - (\sigma^2 + t)\log(1 + t/\sigma^2)) = \exp\left(-\sigma^2[(1 + x)\log(1 + x) - x]\right),\end{aligned}$$
   où $x = t/\sigma^2$. L'inégalité donnée permet de conclure.