

Corrigé TD 4 : Galton-Watson

1 Exercice 1

1. On procède par induction pour montrer la propriété $S_k = |A^k|, \forall k : 0 \leq k \leq N - 1$. La propriété est trivialement vraie au rang 1, et on voit que A^{k+1} est obtenu de A^k en enlevant un élément et en rajoutant ξ_k autres, d'où l'hérédité.

Enfin par définition N est le premier temps k où $S_k = |A^k| = 0$.

2. On montre par induction (récurrence forte) la propriété suivante : $\forall i$,
- A^{τ_i} contient tous les sommets à distance i de x ,
 - $|A^{\tau_i}| = Z_i$,
 - et B_{τ_i} contient tous les sommets à distance $< i$ de x .

Cette propriété est vraie aux rangs $i = 1$ et $i = 2$.

Pour l'hérédité, considérons l'algorithme à partir de τ_i . La file contient alors tous les sommets à distance i , sommets que l'on va explorer tour à tour, en ajoutant à la file leurs voisins qui ne sont pas dans B_{τ_i} , c'est-à-dire exactement les sommets qui sont à distance $i + 1$. Après Z_i pas, c'est-à-dire en $\tau_{i+1} = \tau_i + Z_i$, on a exploré tous les sommets à distance i (ils sont maintenant dans B) et on a bien ajouté tous leurs voisins à la file. La nouvelle taille de la file est bien $\sum_{k=\tau_i}^{\tau_{i+1}-1} \xi_k$, d'où le résultat.

3. (a) Par hypothèse la suite $(\xi_k)_k$ est i.i.d. de loi μ et $S_{k+1} - S_k = \xi_k - 1$. Donc on a bien une marche aléatoire débutée en 1, et $\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = y) = \mathbb{P}(\xi_k - 1) = k + 1$. Par ailleurs, N est bien le temps d'atteinte de 0 par la question 1.

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_{i+1} = a | \tau_1, \dots, \tau_i, Z_1, \dots, Z_i] &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=\tau_i}^{\tau_{i+1}-1} \xi_k = a | \tau_1, \dots, \tau_i, Z_1, \dots, Z_i\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=\tau_i}^{\tau_i+Z_i-1} \xi_k = a | \tau_1, \dots, \tau_i, Z_1, \dots, Z_i\right) \\ &= \mu^{*Z_i}(a). \end{aligned}$$

On reprend ensuite l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\cdot | Z_1, \dots, Z_i]$, ce qui donne le résultat.

- (c) $\{|T| < \infty\} = \{N < \infty\}$ est par définition de N , $\{|T| < \infty\} = \{\exists i, Z_i = 0\}$ par la question 2.

4. Soit $\rho_i = \mathbb{P}(Z_i = 0)$. Alors $\rho_0 = \mathbb{P}(\xi_0 = 0) = \varphi(0)$.
On calcule alors $\mathbb{P}(Z_{i+1} = 0)$ par récurrence :

$$\rho_{i+1} = \mathbb{P}(Z_{i+1} = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{i+1} = 0 | Z_1 = k) \mu(k)$$

. On utilise le fait que $\mathbb{P}(Z_{i+1} = 0 | Z_1 = k) = \mathbb{P}(Z_i = 0)^k$. Cette égalité provient du fait que si la première génération a k éléments, l'extinction est équivalente à l'extinction de la descendance de tout le monde. Or ces différentes descendances sont indépendantes. Plus rigoureusement on pourrait montrer qu'un processus de branchement démarré en k a la même loi (en tant que processus de Markov) que la somme de k processus de branchements démarrés en 1. On obtient

$$\rho_{i+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_i^k \mu(k) = \varphi(\rho_i).$$

Comme on a $\rho = \lim \uparrow \rho_i$ par probabilité d'une union infinie, on déduit que ρ est le point fixe de φ dans le bassin d'attraction de 0, donc le plus petit. Dessin :

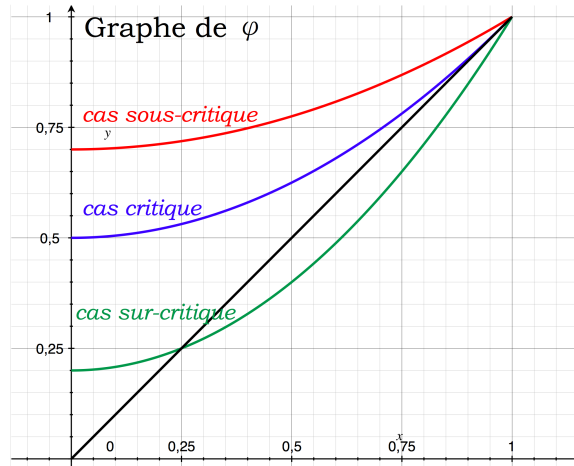


FIGURE 1 – dessin piqué sur <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GWpointfixe.png>

2 Exercice 2

- On peut montrer par induction (et on a probablement déjà utilisé) que $|B_k| = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i$. Ainsi, comme $\xi_k = \#\{y \in [n] \setminus B_k, y \sim x\}$, et que les arêtes que l'on considère sont indépendantes des arêtes considérées jusqu'à maintenant, donc conditionnellement à ξ_0, \dots, ξ_{k-1} ,

$$\xi_k \sim \text{Bi}(n - 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i, p).$$

2. On peut construire des variables ξ'_i i.i.d. de loi $\text{Bi}(n, p)$ telles que $\xi'_i > \xi_i$ p.s. (par exemple, on complète en rajoutant des binomiales de bon paramètre, puis on vérifie que la somme a bien la loi d'une suite i.i.d.) et considérer l'arbre T' associé, qui a la loi demandée. Comme la marche associée S' domine S p.s., elle ne peut toucher 0 qu'après, donc on a automatiquement $N' \geq |\mathcal{C}(x)|$ p.s.
3. ξ'_1 s'écrit comme une somme de n variables i.i.d. B_1, \dots, B_n de loi $\text{Be}(p)$, d'où $\varphi(s) = \mathbb{E}[s^{B_1 + \dots + B_n}] = \mathbb{E}[s^{B_1}]^n = (ps + (1-p))^n = (\frac{c}{n}s + (1 - \frac{c}{n}))^n = (1 + \frac{c(s-1)}{n})^n$. On déduit que $\varphi(s)/s \leq e^{c(s-1)}/s = e^{c(s-1) - \log(s)}$.
4. On dérive $c(s-1) - \log(s)$ par rapport à s pour optimiser la borne, on trouve $s = 1/c > 1$, pour lequel on a alors $\varphi(s)/s \leq e^{1-c+\log(c)} = e^{-\alpha} < 1$.
5. On a bien $D_0 = 1$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_{k+1} | D_1, \dots, D_k] &= \mathbb{E}[s^{S'_k + \xi'_{k+1} - 1 + k + 1} \varphi(s)^{-(k+1)} | D_1, \dots, D_k] \\ &= D_k \mathbb{E}[s^{\xi'_{k+1}}] / \varphi(s) = D_k. \end{aligned}$$

6. Pour tout k , $N' \wedge k$ est un temps d'arrêt borné, le théorème d'arrêt s'applique donc sans problème, et on obtient

$$1 = \mathbb{E}[D_{k \wedge N'}] = \mathbb{E}[s^{S'_{k \wedge N'}} (\varphi(s)/s)^{-k \wedge N'}].$$

Comme $s > 1$ et $k \wedge N'$ est avant le premier temps d'atteinte de 0, $s^{k \wedge N'} > 1$ p.s., et on obtient $1 \geq \mathbb{E}[(\varphi(s)/s)^{-k \wedge N'}] \geq \mathbb{E}[e^{\alpha(N' \wedge k)}]$ par la question 4. Maintenant, comme p.s. $N' \wedge k$ croît vers N' quand $k \rightarrow \infty$, le théorème de convergence monotone donne $\mathbb{E}[e^{\alpha N'}] \leq 1$. On a donc un moment exponentiel.

7.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{x=0}^n \mathcal{C}(x) \geq \frac{1+\epsilon}{\alpha} \log n) &\leq n \mathbb{P}(C(1) \geq \frac{1+\epsilon}{\alpha} \log n) \\ &\leq \mathbb{P}(N' \geq \frac{1+\epsilon}{\alpha} \log n) \\ &= \mathbb{P}(e^{\alpha N'} \geq n^{1+\epsilon}) \\ &\leq n \times \frac{1}{n^{1+\epsilon}} = o(1). \end{aligned}$$

Où on utilise successivement : la proba d'une union, le fait que N' domine stochastiquement $\mathcal{C}(1)$ (question 2), la croissance de e^α et l'inégalité de Markov avec le résultat de la question 6.

3 Exercice 3

1. Cette propriété est vraie pour $x = 1$ par définition de ρ . Maintenant on veut raisonner par récurrence. Soit T_1 le temps d'atteinte de 1.

$$\mathbb{P}_x(N < \infty) = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}(N < \infty)] = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}(N < \infty) \circ \theta_{T_1} \mathbf{1}(T_1 < \infty)].$$

La dernière égalité est même une égalité d'évènement : Comme la marche ne descend que par des pas -1 ,

$$\{\text{toucher } 0\} = \{\text{toucher } 1 \text{ puis toucher } 0\}.$$

On applique ensuite Markov fort, qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(N < \infty) &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_{T_1}}[\mathbf{1}(N < \infty)] \mathbf{1}(T_1 < \infty)] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_1[\mathbf{1}(N < \infty)] \mathbf{1}(T_1 < \infty)] \\ &= \rho \mathbb{E}_x[\mathbf{1}(T_1 < \infty)] = \rho \mathbb{E}_{x-1}[\mathbf{1}(N < \infty)] \end{aligned}$$

où la dernière égalité est due au fait que sous \mathbb{P}_x , la marche aléatoire $(S_k - 1)_k$ suit la loi \mathbb{P}_{x-1} , et son temps d'atteinte de 0 est T_1 . On conclut par récurrence.

2.

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbb{P}}_{x_0}(S_{i+1} - S_i = k | S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i) \\ &= \frac{\bar{\mathbb{P}}_{x_0}(S_{i+1} - S_i = k, S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i)}{\bar{\mathbb{P}}_{x_0}(S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{x_0}(S_{i+1} - S_i = k, N < \infty, S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i)}{\mathbb{P}_{x_0}(N < \infty, S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i)}. \end{aligned}$$

On a une disjonction de cas : si $x_i = 0$, alors l'évènement $S_i = x_i = 0$ implique que $N < \infty$ et $S_{i+1} = 0$. La grosse fraction vaut 1 si et seulement si $k = 0$.

Si $x_i \neq 0$, alors aucun des x_0, \dots, x_i n'est nul sinon on conditionne par un évènement vide (la marche S est une marche arrêtée en 0). Donc la condition $N < \infty$ ne dépend que de ce qui se passe après le temps i en bas, et $i + 1$ en haut.

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbf{1}(S_{i+1} - S_i = k, S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i) \mathbf{1}(N < \infty) \circ \theta_{i+1}]}{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbf{1}(S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i) \mathbf{1}(N < \infty) \circ \theta_i]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbf{1}(S_{i+1} - S_i = k, S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i) \mathbb{E}_{S_{i+1}}[\mathbf{1}(N < \infty)]]}{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbf{1}(S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i) \mathbb{E}_{S_i}[\mathbf{1}(N < \infty)]]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbf{1}(S_{i+1} - S_i = k, S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i)] \mathbb{E}_{x_0+k}[\mathbf{1}(N < \infty)]}{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbf{1}(S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i) \mathbb{E}_{x_0}[\mathbf{1}(N < \infty)]} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{x_0}(S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i) \mu(k+1) \rho^{x_0+k}}{\mathbb{P}_{x_0}(S_0 = x_0, \dots, S_i = x_i) \rho^{x_0}} = \mu(k+1) \rho^k, \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété de Markov simple en haut et en bas. On déduit que sous $\bar{\mathbb{P}}$, S est une chaîne de Markov de noyau de transition

$$p(x, y) = \begin{cases} \delta_y(0) & \text{si } x = 0 \\ \mu((y-x)+1) \rho^{y-x} & \text{sinon.} \end{cases}.$$

C'est à dire une marche aléatoire arrêtée en 0, de loi $\bar{\mu}(1 + \cdot)$ où $\bar{\mu}(k) = \mu(k) \rho^{k-1}$. Ceci nous dit que sous $\bar{\mathbb{P}}$, T est un arbre de Galton-Watson de loi $\bar{\mu}$.

3. On a $\bar{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(k) \rho^{k-1} s^k = \varphi(\rho s) / \rho$. Donc le graphe de $\bar{\varphi}$ est la restriction du graphe de φ à gauche et en dessous du premier point fixe. On est en régime sous-critique.