TD 5 : Phase sur-critique v2

Exercice 1. *Nombre d'arêtes dans la composante géante*

On considère $G_{n,p}$ avec $p = c/n$ et $c > 1$. On dénomme C_1 la plus grande composante (dite géante), et $\mathcal{C}(y)$ la composante qui contient $y \in [n]$. Soient $x(c)$ la solution dans $(0, 1)$ de $xe^{-x} = ce^{-c}$, et $f(n) \to \infty$ arbitrairement lentement. Pour cet exercice, il faut utiliser le Théorème 7 du cours.

1. Soit $a \in [n]$. Montrer que $\mathbb{P}(a \in C_1) = \mathbb{E}[|C_1|/n] = 1 - \frac{x}{c} + o(1)$.
2. On dit qu'une realisation de $G_{n,p}$ n'est pas gentil si $\exists y \in [n]$ telle que $|\mathcal{C}(y)| \geq f(n)\log(n)$ et $\mathcal{C}(y) \neq C_1$. Soient $a \neq b \in [n]$, et $e = (a, b)$ l'arête entre a et b. Nous écrivons G pour $G_{n,p}$. Montrer que
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(e \in E(G),\, e \notin E(C_1),\, G \text{ gentil})\\ &\leq \mathbb{P}\Big(e \in E(G),\, |\mathcal{C}_{G\setminus b}(a)| < f(n)\log(n),\, |\mathcal{C}_{G\setminus \mathcal{C}(a)}(b)| < f(n)\log(n)\Big),\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(e \in E(G),\, e \notin E(C_1),\, G \text{ gentil})\\ &\geq \mathbb{P}\Big(e \in E(G),\, |\mathcal{C}_{G\setminus b}(a)| < f(n)\log(n)/2,\, |\mathcal{C}_{G\setminus \mathcal{C}(a)}(b)| < f(n)\log(n)/2,\\ &\qquad G \setminus (\mathcal{C}(a) \cup \mathcal{C}(b)) \ \text{ gentil}\Big).\end{aligned}$$
3. Décomposer selon les valeurs de $\mathcal{C}_{G\setminus b}(a)$ et $\mathcal{C}_{G\setminus \mathcal{C}(a)}(b)$ et utiliser l'indépendence pour montrer que
$$\mathbb{P}(e \in E(G),\, e \notin E(C_1),\, G \text{ gentil}) = \frac{c}{n}(\tfrac{x}{c} + o(1))(\tfrac{x}{c} + o(1))(1 - o(1)).$$
4. Déduire que
$$\mathbb{E}[|E(G) \setminus E(C_1)|] = (\tfrac{x^2}{c^2} + o(1))\frac{cn}{2}.$$
5. Montrer que le nombre d'arêtes moyen dans la composante géante est donné par
$$\mathbb{E}[|E(C_1)|] = \left(1 - \frac{x^2}{c^2} + o(1)\right)\frac{cn}{2}.$$