Corrigé TD 5 : Phase sur-critique

1. $\mathbb{E}[|C_1|] = \mathbb{E}[\sum_{y\in[n]} \mathbb{1}(y \in C_1)] = \sum_{y\in[n]} \mathbb{P}(y \in C_1) = n\,\mathbb{P}(a \in C_1)$.
2. Si G et gentil, et $e \in E(G)$, $e \notin E(C_1)$, alors par définition d'être gentil, $\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(b)$ a une taille inférieure à $f(n)\log(n)$. A fortiori c'est vrai pour les composantes restreintes que l'on considère. On a donc inclusion d'évènement qui donne la première inégalité.

   Si $e \in E(G)$, $|\mathcal{C}_{G\setminus b}(a)| < f(n)\log(n)/2$ et $|\mathcal{C}_{G\setminus\mathcal{C}(a)}(b)| < f(n)\log(n)/2$, alors la composante contenant e contient moins de $f(n)\log(n)$ sommets. Comme on suppose de plus que $G\setminus(\mathcal{C}(a)\cup\mathcal{C}(b))$ est gentil, cela implique que G a une composante géante de taille $> f(n)\log(n)$. Donc la composante contenant e n'est pas C_1. On a bien l'inclusion d'évènements qui donne la seconde inégalité.
3.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(e \in E(G),\, e \notin E(C_1),\, G \text{ gentil})\\
&\le \mathbb{P}\Big(e \in E(G),\, |\mathcal{C}_{G\setminus b}(a)| < f(n)\log(n),\, |\mathcal{C}_{G\setminus\mathcal{C}(a)}(b)| < f(n)\log(n)\Big).\\
&= \sum_{\substack{A,B\subset[n],\\ a\in A, b\in B,\\ A\cap B=\emptyset,\\ |A|,|B|<f(n)\log(n)}} \mathbb{P}\Big(e \in E(G),\, \mathcal{C}_{G\setminus b}(a) = A,\, \mathcal{C}_{G\setminus A}(b) = B\Big)\\
&= \sum_{\substack{A,B\subset[n],\\ a\in A, b\in B,\\ A\cap B=\emptyset,\\ |A|,|B|<f(n)\log(n)}} \mathbb{P}\Big(e \in E(G)\Big)\,\mathbb{P}\Big(\mathcal{C}_{G\setminus b}(a) = A\Big)\,\mathbb{P}\Big(\mathcal{C}_{G\setminus A}(b) = B\Big).
\end{aligned}$$

En effet les trois évènements considérés sont indépendants car ils considèrent des ensemble d'arêtes disjoints : le premier regarde seulement e, le deuxième regarde les arêtes qui ont une extrêmité dans A sauf e, le troisième regarde les arêtes qui ont une extrêmité dans B sauf celles qui ont une extrêmité dans A. On peut donc maintenant réécrire en factorisant les termes qui ne dépendent pas de certains indices.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\cdots) &= \frac{c}{n} \sum_{\substack{A\subset[n]\setminus b,\\ |A|<f(n)\log(n)}} \mathbb{P}\Big(\mathcal{C}_{G\setminus b}(a) = A\Big) \sum_{\substack{B\subset[n]\setminus A,\\ b\in B,\\ |B|<f(n)\log(n)}} \mathbb{P}\Big(\mathcal{C}_{G\setminus A}(b) = B\Big)\\
&= \frac{c}{n} \sum_{\substack{A\subset[n]\setminus b,\\ |A|<f(n)\log(n)}} \mathbb{P}\Big(\mathcal{C}_{G\setminus b}(a) = A\Big)\,\mathbb{P}\Big(|\mathcal{C}_{G\setminus A}(b)| < f(n)\log(n)\Big).
\end{aligned}$$

La taille de $G \setminus A$ est entre $n - f(n)\log n$ et n. Cela suffit à avoir que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(|\mathcal{C}_{G\setminus A}(b)| < f(n)\log(n)\Big) &= \mathbb{P}\Big(b \text{ est dans la composante géante de } G \setminus A\Big) + o(1)\\ &= \tfrac{x}{c} + o(1)\end{aligned}$$

avec un $o(1)$ uniforme en A, par le Théorème 7. De même pour l'autre facteur. On obtient la borne supérieure voulue :

$$\mathbb{P}(e \in E(G),\, e \notin E(C_1),\, G \text{ gentil}) \leq \frac{c}{n}(\tfrac{x}{c} + o(1))(\tfrac{x}{c} + o(1)).$$

Pour la borne inférieure on peut faire parail, et on a toujours, grâce à l'indépendence,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(e \in E(G),\, e \notin E(C_1),\, G \text{ gentil})\\ &\geq \mathbb{P}\Big(e \in E(G),\, |\mathcal{C}_{G\setminus b}(a)| < f(n)\log(n)/2,\, |\mathcal{C}_{G\setminus \mathcal{C}(a)}(b)| < f(n)\log(n)/2,\\ &\qquad G \setminus (\mathcal{C}(a) \cup C(b)) \text{ gentil}\Big)\\ &= \sum_{\substack{A,B\subset[n],\\ a\in A, b\in B,\\ A\cap B=\emptyset,\\ |A|,|B|<f(n)\log(n)/2}} \mathbb{P}\Big(e \in E(G)\Big)\,\mathbb{P}\Big(\mathcal{C}_{G\setminus b}(a) = A\Big)\,\mathbb{P}\Big(\mathcal{C}_{G\setminus A}(b) = B\Big)\,\mathbb{P}\Big(G \setminus (A \cup B) \text{ gentil}\Big).\end{aligned}$$

Comme précédemment, on minore uniformément chaque terme, ce qui est possible car à chaque fois on regarde des graphes dont la taille est uniformément grande. On obtient :

$$\mathbb{P}(e \in E(G),\, e \notin E(C_1),\, G \text{ gentil}) \geq \frac{c}{n}(\tfrac{x}{c} + o(1))(\tfrac{x}{c} + o(1))(1 - o(1)),$$

d'où le résultat.

4. En sommant sur les arêtes on obtient

$$\mathbb{E}[|E(G)\setminus E(C_1)|\,\mathbb{1}(G \text{ gentil})] = \binom{n}{2}\mathbb{P}(e \in E(G),\, e \notin E(C_1),\, G \text{ gentil}) = (\tfrac{x^2}{c^2} + o(1))\frac{cn}{2}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|E(G) \setminus E(C_1)|\,\mathbb{1}(G \text{ pas gentil})] &\leq \mathbb{E}[|E(G)|\,\mathbb{1}(G \text{ pas gentil})]\\ &\leq \mathbb{E}[100n\,\mathbb{1}(G \text{ pas gentil})] + \binom{n}{2}\mathbb{P}(|E(G)| \geq 100n)\\ &\leq 100n o(1) + n^2 O(e^{-n^{\nu}}) = o(n).\end{aligned}$$

Où on a utilisé une inégalité de grandes déviations (par exemple Bernstein).

5. S'obtient de la question précédente par soustraction.