ENS de Lyon
Master 1 Mathématiques 2016-2017

Graphes aléatoires
E. Baur & M. Maazoun

TD 6 : Vacances v2

Exercice 1.

On sait que quand $p \ll 1/n$, on n'a pas de composante unicyclique avec grande proba. Montrer que c'est aussi le cas quand $p \gg 1/n$.

Exercice 2.

Soit Δ le nombre de triangles dans $G_{n,p}$, $p = c/n$. On cherche à calculer la limite des moments factoriels

$$\mathbb{E}[\Delta(\Delta - 1) \cdots (\Delta - r + 1)],$$

pour $r \geq 1$.

1. Soit $F_r = \Delta(\Delta - 1) \cdots (\Delta - r + 1)$. Montrer que

$$\mathbb{E}[F_r] = \sum_{j=0}^{3r} N_j p^{3r-j},$$

   où N_r est le nombre de suites de r triangles distincts dans K_n, avec j arêtes superposées comptées avec multiplicité (une superposition de l arêtes compte pour $l - 1$).
2. Montrer que $N_0 \sim \frac{n^{3r}}{6^r}$. Pour ça, faire une majoration grossière, et minorer N_0 par le nombre de suites de r triangles qui n'ont aucun sommet en commun.
3. Montrer que pour $j \geq 1$, si on regarde le sous-graphe H de K_n obtenu en prenant l'union de r triangles avec j superpositions d'arête, alors on a $|V(H)| \leq 3r - j - 1$. (On avait par définition $|E(H)| = 3r - j$).
4. En déduire que $\forall j \geq 1$, $N_j = O(n^{3r-j-1})$.
5. Déduire la limite des moments factoriels. En déduire une convergence en loi par un théorème vu dans le cours.

Exercice 3.

Soit $L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_n$ l'énumération des tailles des composantes connexes de $G_{n,p}$, $p = c/n$, $c > 1$. Soient a et b deux sommets choisis uniformément et indépendamment dans $G_{n,p}$. Nous écrivons $a \leftrightarrow b$ si il existe un chemin entre a et b (de manière équivalente si a et b sont dans la même composante connexe).

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(a \leftrightarrow b \mid L_1, L_2, \ldots\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i^2}{n^2}.$$

   Noter que cette variable aléatoire est bornée par 1.

2. Prendre l'espérance des deux côtés. À gauche on obtient $\mathbb{P}(a \leftrightarrow b)$ non conditionné. À droite on sépare pour obtenir

$$\mathbb{E}[(L_1/n)^2] + \mathbb{E}[\sum_{i=2}^{n} \frac{L_i^2}{n^2} \mathbb{1}(L_2 > K \log(n))] + \mathbb{E}[\sum_{i=2}^{n} \frac{L_i^2}{n^2} \mathbb{1}(L_2 \leq K \log(n))].$$

Utiliser le Théorème 7 pour déduire que $\mathbb{P}(a \leftrightarrow b) \to (1 - x/c)^2$.

Exercice 4.

Montrer que dans $G_{n,p}$ pour $p = c/n$, $c < 1$, la probabilité d'avoir un chemin de taille $\lfloor \beta \log(n) \rfloor$ tend vers 0 quand $\beta > 1/\log(1/c)$, et vers 1 si $\beta < 1/\log(1/c)$ (le second moment est plus difficile, il faut procéder comme dans l'exercice 2 et utiliser le fait que le nombre de paires de chemins de longueur k qui partagent j arêtes est majoré par cte $\times\, n^{2k+1-j} k^2$.)

Les exercices suivants rentrent aussi dans le thème "révisions" :

— Exercices 4,5,7 et 8 du TD 1.

— Exercice 1 du TD 5. Vous pouvez aussi faire le second moment pour montrer que $|E(C_1)|/n \xrightarrow{\mathbb{P}} (1 - x^2/c^2)c/2$.

Bon courage !