Graphes aléatoires
E. Baur & M. Maazoun

TD 7 : Degrés v2

Exercice 1. *Degrés dans la composante géante*

On se place dans $G = G_{n,p}$ avec $p = c/n$ et $c > 1$. Soit $x(c)$ la solution dans $(0,1)$ de $xe^{-x} = ce^{-c}$. Pour $d \geq 1$ on veut calculer l'asymptotique du nombre Z_d de sommets de degré d dans la composante géante (que l'on note C_1). On pose $f(n) \to \infty$ arbitrairement lentement.

1. On considère le sommet 1, et on veut calculer la probabilité qu'il soit à la fois de degré d et hors de la composante géante. On dénote G' le graphe induit par G sur $[\![2, n]\!]$, et C'_1 sa composante géante. On dénote $\mathcal{V}_G(x)$ le voisinage d'un sommet x dans le graphe G, et $\mathcal{C}_G(x)$ sa composante.
   (a) Pour $x_1, \ldots, x_d$ des sommets disjoints de G', encadrer
   $$\mathbb{P}(\mathcal{V}_G(1) = \{x_1, \ldots, x_d\}, |\mathcal{C}_G(1)| \leq f(n)\log(n)).$$
   (b) Sommer et utiliser le Théorème 7 du cours pour déduire que
   $$\mathbb{P}(\deg(1) = d, 1 \notin C_1) \sim e^{-c}\frac{c^d}{d!} \times \frac{1}{n^d} \sum_{2 \leq x_1, \ldots, x_d \leq n \text{ distincts}} \mathbb{P}(x_1, \ldots, x_d \notin C'_1).$$
   (c) Montrer que le deuxième facteur est proche de $\mathbb{E}[(\frac{|G' \setminus C'_1|}{n})^d]$, et donc converge vers $(\frac{x}{c})^d$. Indication : la convergence en probabilité de variables uniformément bornées implique la convergence dans tous les L^p.
2. En déduire l'asymptotique de $\mathbb{E}[Z_d]$.
3. Procéder de même pour le deuxième moment et déduire la limite en probabilité de Z_d/n.

Exercice 2. *Méthode des moments factoriels pour des variables entières*

Cet exercice vise à démontrer le théorème général suivant, qui implique le Théorème 5 du cours. On note $(x)_r := x(x-1)\cdots(x-r+1)$ la factorielle tombante, supposée nulle quand $x < 0$.

Théorème : Soient $X_n, n \geq 1$ et X des variables aléatoires à valeur dans les entiers positifs. Supposons que pour tout $r \geq 1$, $\mathbb{E}[(X_n)_r] \to \mathbb{E}[(X)_r]$ et que pour tout $k \geq 0$, $\mathbb{E}[(X)_r]/(r-k)!$ tend vers 0 quand $r \to \infty$. Alors X_n converge en loi vers X.

1. On admet que pour $b \geq 1$ et $0 \leq a \leq b$, $\sum_{i=0}^{a}(-1)^i\binom{b}{i}$ a le même signe que $(-1)^a$. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $k \geq 0$, $m \geq 0$,
   $$\left(\sum_{r=k}^{k+m}(-1)^{r-k}\frac{(x)_r}{(r-k)!k!}\right) - \mathbb{1}_{\{x=k\}}$$

est positif pour m pair et négatif pour m impair. En déduire une série qui alterne autour de $\mathbb{P}(Y=k)$ pour Y une variable aléatoire entière positive.

2. Déduire le théorème. (Indication : choisir m puis n).
3. Déduire le Théorème 5 du cours.

Exercice 3.

On considère la mesure empirique des degrés $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\deg_{G_{n,p}}(i)}$. C'est une mesure de probabilité elle-même aléatoire. On munit l'espace des mesures sur $\mathbb{N}_0$ de la distance en variation totale $|\mu-\nu|_{VT} = \frac{1}{2}\sum_{d=0}^\infty |\mu(d)-\nu(d)|$. On a l'estimée suivante dans le cas $p=1/n$, montrée dans la Proposition 9 du cours :

$$\mathbb{P}\left(|X_d - \mathbb{E}[X_d]| \geq f(n)\sqrt{n}\right) \leq \frac{C}{f(n)^2}.$$

Estimer $\mathbb{P}(\sum_{d=0}^\infty |\mu_n(d) - e^{-c}\frac{c^d}{d!}| \geq \epsilon)$ (Indication : couper la somme à $g(n)$ pour une fonction $g(n)\to\infty$ arbitraire, puis bien choisir g). En déduire que la mesure empirique μ_n converge en probabilité (pour la distance $|\cdot|_{VT}$) vers une loi de Poisson de paramètre c.