
Corrigé TD 8 : Degrés suite

Exercice 3

On suppose ici que $p = o(\log(n)/n)$. Pour $j = j(n) \geq 0$, on note $\lambda_j = \lambda_j(n) = \mathbb{E}[X_j] = n\mathbb{P}(\text{Bi}(n-1, p) = j)$. Pour tout n on fixe $k \geq pn$ tel que $\max(\lambda_k, \lambda_k^{-1})$ soit minimal.

1. On dénote par ϕ la fonction $(0, \infty) \ni x \mapsto \max(x, 1/x)$. C'est une fonction convexe positive qui atteint son minimum global en 1.

On commence par observer que à n fixé, $i \mapsto \lambda_i$ est croissant quand $i \leq np$ et décroissant quand $i \geq np$ (unimodalité de la loi binomiale). On va montrer que si $a \geq np$ et $a = O(np)$, alors $\lambda_a \rightarrow \infty$. Ceci implique alors que $k \gg np$. Sinon si $k = O(np)$, alors $k+1 = O(np)$ donc $\lambda_{k+1} \rightarrow \infty$. Alors à partir d'un certain rang $\lambda_k > \lambda_{k+1} \geq 1$, d'où $\phi(\lambda_{k+1}) < \phi(\lambda_k)$, contredisant l'optimalité de k .

Faisons ce calcul. Soit a avec $a \geq np$ et $a = O(np) = o(\log n)$.

$$\begin{aligned} \lambda_a &= n \binom{n-1}{a} p^a (1-p)^{n-1-a} \asymp n \frac{n^a e^a}{\sqrt{a} a^a} p^a (1-p)^{n-a} \\ &= \frac{n}{\sqrt{a}} \exp[a - a \log(a/(np)) + (n-a) \log(1-p)] \\ &= \frac{n}{\sqrt{a}} \exp[a - a \log(a/(np)) + (n-a)(-p + O(p^2))] \\ &= \frac{n}{\sqrt{a}} \exp[a - np - a \log(O(1)) + ap + (n-a)O(p^2)] \\ &\geq \frac{n}{\sqrt{a}} \exp[-O(a) + O(np^2)] = \frac{n}{\sqrt{o(\log n)}} \exp[-o(\log n)] \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie de la question, on commence par voir que $\lambda_{k+1}/\lambda_k \leq \frac{np}{(k+1)(1-p)} \rightarrow 0$, et $\lambda_k/\lambda_{k-1} \leq \frac{np}{k(1-p)} \rightarrow 0$. Maintenant, supposons par l'absurde que λ_{k-1} reste borné pour des n dans une sous-suite. Alors λ_k tend vers 0, et donc $\phi(\lambda_k) \rightarrow \infty$, ce qui implique qu'à partir d'un certain rang, $\phi(\lambda_k) > \phi(\lambda_{k-1})$, ce qui est absurde. Donc $\lambda_{k-1} \rightarrow \infty$. Le même raisonnement implique que $\lambda_{k+1} \rightarrow 0$.

2. On procède par premier et second moment. L'espérance du nombre de sommets de degré $\geq k+1$ est

$$\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{k+1} \left(\frac{np}{k(1-p)} \right)^i \leq \lambda_{k+1} \frac{1}{1 - o(1)} = o(1).$$

Donc avec grande probabilité il n'y en a pas.

On montre par la méthode du second moment qu'avec grande probabilité il y a un sommet de degré $k - 1$. Déjà, $\mathbb{E}[X_{k-1}] = \lambda_{k-1} \rightarrow \infty$, et après calcul, on montre que

$$\mathbb{E}[X_{k-1}^2] \sim \mathbb{E}[X_{k-1}]^2 \left[\frac{(k-1)^2}{pn^2} + \frac{(n-k)^2}{n^2(1-p)} \right].$$

Si on montre que $(k-1)^2 = o(pn^2)$, on a gagné. Pour ça il suffit se montrer que si $a \geq cn\sqrt{p}$, alors $\lambda_a \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_a &= n \binom{n-1}{a} p^a (1-p)^{n-1-a} \leq n \left(\frac{nep}{a} \right)^a \\ &\leq n \left(\frac{e\sqrt{p}}{c} \right)^a \leq n \left(\frac{e\sqrt{p}}{c} \right)^{cn\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $p \gg 1/n^2$, cette dernière quantité est $\leq n(o(\log n/n))^2$ à partir d'un certain rang, donc tend vers 0.

3. On a que le nombre moyen de sommets de degré k est λ_k , supposé convergent vers λ . Si $\lambda = 0$, le premier moment donne $\mathbb{P}(\Delta(G) = k) \rightarrow 0$ et si $\lambda = \infty$, le second moment comme ci-dessus donne $\mathbb{P}(\Delta(G) = k) \rightarrow 1$. Pour $\lambda \in (0, \infty)$, il faudrait un résultat de convergence Poissonienne pour montrer que $\mathbb{P}(\Delta(G) = k-1) \rightarrow e^{-\lambda}$.