Graphes aléatoires
E. Baur & M. Maazoun

TD 9 : Connexité v2

Exercice 1. *Seuil de connexité*

On se place autour du seuil de connexité : $p = \frac{\log(n)+c+o(1)}{n}$, $c \in \mathbb{R}$. Vérifier que la preuve du Théorème 12 du cours implique que toutes les composantes en dehors de la géante sont des sommets isolés. Combien y en a-t-il ?

Exercice 2. *Premier temps de connexité dans le processus de graphe aléatoire*

On considère ici une extension du modèle $G_{n,m}$, mais où à n fixé, on fait varier m "sur le même graphe". Plus formellement, pour $n \geq 1$, on tire uniformément au hasard une permutation des arêtes $e_1, \dots, e_{\binom{n}{2}} \in E(K_n)$, et pour tout $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ on désigne par $G_{n,m}$ le sous-graphe de K_n muni des arêtes $e_1, \dots, e_m$. Notre espace de probabilité n'est plus un graphe mais une suite croissante de graphes $G_{n,1}, \dots, G_{n,\binom{n}{2}}$. Toutefois, chaque $G_{n,m}$ est bien un graphe à n sommets et m arêtes uniforme.

On définit les temps d'arrêts suivants : $M_c = \inf\{m \geq 0 : G_{n,m} \text{ est connexe}\}$, et $M_1 = \inf\{m \geq 0 : \delta(G_{n,m}) \geq 1\}$ (on rappelle que δ désigne le degré minimal). On se propose de montrer la propriété suivante : Avec grande probabilité, $M_c = M_1$.

1. On pose $m_\pm = \lfloor \frac{1}{2}(n \log n \pm n \log\log n) \rfloor$, et $p_\pm = m_\pm / \binom{n}{2}$. On veut montrer qu'avec grande probabilité $m_- \leq M_1 \leq M_c \leq m_+$, et qu'en m_- le graphe est composé d'une composante géante plus un ensemble de sommets isolés V_1, avec $|V_1| \leq 2\log n$.
   (a) Montrer qu'avec grande probabilité G_{n,m_+} est connexe, et G_{n,m_-} non (le montrer pour G_{n,p_+} (G_{n,p_-}) puis transférer avec le Lemme 2).
   (b) Montrer qu'avec grande probabilité G_{n,m_-} a moins de $2\log n$ sommets isolés (le montrer pour G_{n,p_-} puis transférer avec le Lemme 2).
   (c) Les calculs du cours (Théorème 12) s'appliquent toujours dans notre cas pour montrer que la probabilité d'avoir des composantes ni géante ni isolées dans G_{n,p_-} est un $o(n^{-0.99})$. Déduire par l'Exercice 3 que cette probabilité est un $o(1)$ dans $G_{n,m-}$.
   (d) Conclure.
2. Entre m_- et m_+ on ajoute $m_+ - m_-$ arêtes. Montrer qu'avec grande probabilité aucune de ces arêtes n'est entre deux sommets de V_1. Conclure.

Exercice 3. *Borne de probabilités conditionnelles et transfert $G_{n,p}$-$G_{n,m}$*

1. Soit A, B des évènements sur un espace de probabilité. Montrer que $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)/\mathbb{P}(B)$.
2. Soit $m \leq \binom{n}{2}$ entier et $p = m/n$. On suppose que $m \to \infty$, $\binom{2}{n} - m \to \infty$. Montrer par la formule de Stirling que $\mathbb{P}(|E(G_{n,p})| = m) \geq \frac{1}{10\sqrt{m}}$ asymptotiquement.

3. Déduire que pour tout évènement de graphes A, $\mathbb{P}(G_{n,m} \in A) \leq 10\sqrt{m}\,\mathbb{P}(G_{n,p} \in A)$.

Exercice 4. *Distance en variation totale sur un espace discret*

On reprend la définition de distance en variation totale sur $\mathbb{Z}$ définie dans l'Exercice 3, TD 7 : $|\mu - \nu|_{VT} = \frac{1}{2}\sum_{d=-\infty}^{\infty} |\mu(d) - \nu(d)|$. Montrer que dans ce cas la convergence en loi est équivalente à la convergence en variation totale. Attention : ça n'est plus vrai sur $\mathbb{R}$!