Corrigé TD 9 : Connexité v2

Exercice 2

1. (a) Être connexe est une propriété croissante, et $p_\pm$ est asymptotiquement plus grand (resp. plus petit) que tous les $\log n/n + c/n$, avec $c \in \mathbb{R}$ arbitraire. Donc vu le résultat du cours, à partir d'un certain rang, $\liminf \mathbb{P}(G_{n,p_+} \text{ connexe}) \geq 1 - e^{-c}$ pour tout c, et $\limsup \mathbb{P}(G_{n,p_-} \text{ connexe}) \leq 1 - e^{-c}$ pour tout c. D'où le résultat voulu après transfert par le Lemme 2 (être connexe et être non connexe sont des propriétés monotones).

   (b) Soit X_0 le nombre de sommets isolés dans G_{n,p_-}.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_0] &= n(1-p_-)^{n-1} = n\exp(-(n-1)(p_- + O(p_-^2))) \\ &= n\exp(-\log(n) + \log\log n + O(1/n) \sim \log n.\end{aligned}$$

   Pour le second moment,

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \mathbb{E}[X_0] + n(n-1)(1-p_-)^{2n-3} = \mathbb{E}[X_0] + \frac{1-1/n}{1-p_-}\,\mathbb{E}[X_0]^2 \sim \mathbb{E}[X_0]^2.$$

   On a donc concentration de X_0 autour de sa moyenne, plus précisémént, Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(|X_0 - \mathbb{E}[X_0]| \geq \lambda\,\mathbb{E}[X_0]) \leq \frac{\mathbb{E}[X_0^2] - \mathbb{E}[X_0]^2}{\lambda^2\,\mathbb{E}[X_0]^2} = o(1).$$

   Donc avec grande proba, $X_0 < (3/2)\,\mathbb{E}[X_0] < 2\log(n)$.

   (c) L'Exercice 3 donne qu'à partir d'un certain rang,

$$\mathbb{P}(G_{n,m_-} \text{ gentil}) \leq 10\sqrt{m_-}\,\mathbb{P}(G_{n,p_-} \text{ gentil}) \leq 10\sqrt{n\log n}n^{-0.99} = o(1).$$

   (d) Pour conclure la question 1 il faut prouver la chaîne d'inégalités. Avec grande proba G_{n,m_-} contient une composante géante plus éventutuellement des sommets isolés. Comme il n'est pas connexe, le nombre de sommets isolés est non nul. D'où $m_- < M_1$. L'inégalité $M_1 \leq M_c$ est évidente, et comme avec grande proba G_{n,m_+} est connexe, on a aussi $M_c \leq m_+$.

2. Soit Z le nombre d'arêtes ajoutées entre m_- et m_+ qui sont entre deux sommets de V_1. Remarquons que conditionnellement à G_{n,m_-} (et donc à V_1), le choix des arêtes

suivantes est uniforme dans les espaces restants. Donc par "union bound",

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z > 0 \mid G_{n,m_-}) &\leq \sum_{k=m_-}^{m_+} \mathbb{P}(e_k \text{ relie deux sommets de } V_1 \mid G_{n,m_-}) \\ &\leq \sum_{k=m_-}^{m_+} \frac{|V_1|^2}{\binom{n}{2} - k} \leq (m_+ - m_- + 1)\frac{|V_1|^2}{\binom{n}{2} - m_+}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z > 0) &= o(1) + \mathbb{P}(Z > 0, |V_1| < 2\log n) \\ &= o(1) + \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(Z > 0 \mid G_{n,m_-})\mathbb{1}_{|V_1|\leq 2\log n}\right] \\ &\leq o(1) + (m_+ - m_- + 1)\frac{(2\log n)^2}{\binom{n}{2} - m_+} = o(1).\end{aligned}$$

Donc avec grande probabilité toutes les arêtes ajoutées entre m_- et m_+ sont incidentes à la composante géante. Les sommets isolés sont mangés un à un et le moment où le graphe devient connexe est exactement le moment où le dernier sommet isolé est mangé.

Exercice 4

La convergence en variation totale implique la convergence en loi. Maintenant, supposons $\mu_n \to \mu$ en loi, et fixons m tel que $\mu(\llbracket -m, m \rrbracket) > 1 - \epsilon$. Alors

$$\begin{aligned}2|\mu_n - \mu|_{VT} &\leq \sum_{|k|>m} \mu(k) + \sum_{|k|>m} \mu_n(k) + \sum_{k=-m}^{m} |\mu_n(k) - \mu(k)| \\ &= \left(1 - \sum_{k=-m}^{m} \mu(k)\right) + \left(1 - \sum_{k=-m}^{m} \mu_n(k)\right) + \sum_{k=-m}^{m} |\mu_n(k) - \mu(k)|.\end{aligned}$$

Par construction le premier terme est plus petit que ϵ, le second terme converge vers le premier par convergence simple, et le troisième tend vers 0 pour la même raison. D'où le résultat.