
Examen 12 Mai 2017, 9h00-12h00

Exercice 1. Variance d'une somme de fonctions indicatrices

Soit A_1, A_2, \dots, A_m une suite d'événements. Pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$, on écrit $i \sim j$ si $i \neq j$ et A_i et A_j ne sont pas indépendants. On pose $S_m = \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \dots + \mathbb{1}_{A_m}$, et

$$\Delta_m = \sum_{i,j \in \{1, \dots, m\}: i \sim j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

1. Montrer que $\text{Var}(S_m) \leq \mathbb{E}[S_m] + \Delta_m$.
2. Montrer que si $\mathbb{E}[S_m] \rightarrow \infty$ et $\Delta_m = o(\mathbb{E}[S_m]^2)$, alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_m > 0) = 1, \quad \text{et} \quad \frac{S_m}{\mathbb{E}[S_m]} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 \quad \text{en probabilité.}$$

Exercice 2. Couplage et distance en variation totale

Soient $\lambda, \mu \geq 0$. Montrer que

$$d_{VT}(\text{Poisson}(\lambda), \text{Poisson}(\mu)) \leq |\lambda - \mu|.$$

Indication : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 , alors $X + Y$ est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice 3. Méthode de Stein-Chen

On considère le graphe $G = G_{n,p}$, avec $p = c/n$, $c > 0$. On considère le nombre de triangles isolés W , que l'on décompose de la manière suivante. Soit $M = \binom{n}{3}$ et T_1, \dots, T_M une énumération des triangles de K_n . Si on pose $X_i = \mathbb{1}_{\{T_i \text{ présent et isolé dans } G\}}$, alors $W = \sum_{i=1}^M X_i$. On pose enfin $\lambda = \mathbb{E}[W]$, et $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$. On va montrer que $d_{VT}(W, Z) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

1. Question de cours : rappeler l'opérateur de Stein de la loi $\text{Poisson}(\lambda)$, et l'équation caractérisant les fonctions f_A , pour $A \subset \mathbb{N}_0$. Dédire la majoration habituelle de $d_{VT}(W, Z)$.
2. Montrer (en utilisant l'invariance du graphe par réétiquetage) que

$$d_{VT}(W, Z) \leq \lambda \sup_{A \subset \mathbb{N}_0} |\mathbb{E}[f_A(W + 1)] - \mathbb{E}[f_A(W)|X_1 = 1]|.$$

3. Soit G' le graphe obtenu en ajoutant à G les 3 arêtes de T_1 et en enlevant les $3(n-3)$ arêtes ayant exactement un sommet dans T_1 . Alors G' a la loi de G sachant

$\{X_1 = 1\}$. On pose $Y_i = \mathbb{1}_{\{T_i \text{ présent et isolé dans } G'\}}$. Dédurre (en admettant que f_A est $(1 \wedge \lambda^{-1})$ -lipschitzienne) que

$$d_{VT}(W, Z) \leq (\lambda \wedge 1) \left(\mathbb{E}[X_1] + \sum_{i=2}^M \mathbb{E}[|X_i - Y_i|] \right).$$

4. Que vaut Y_i quand $i \neq 1$ et $T_i \cap T_1 \neq \emptyset$? Quand $T_i \cap T_1 = \emptyset$, montrer que $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i)$ est majorée par $\mathbb{P}(T_i \text{ présent dans } G \text{ et il existe une arête entre } T_1 \text{ et } T_i)$ et estimer cette dernière probabilité. En déduire que $d_{VT}(W, Z)$ tend vers 0.
5. Dédurre une convergence en loi pour W quand $n \rightarrow \infty$. Attention : λ dépend de n mais converge, il faut utiliser l'Exercice 2!

Exercice 4. *Opérateur de Stein pour la loi géométrique*

Soit $p \in (0, 1)$. On dit qu'une variable aléatoire Z a la loi géométrique $\text{Geom}(p)$ si

$$\mathbb{P}(Z = j) = (1 - p)^j p, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

À toute application $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, on associe l'application $\mathcal{A}f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{A}f(k) = (1 - p)f(k + 1) - f(k) + pf(0).$$

1. Montrer que si $Z \sim \text{Geom}(p)$, alors $\mathbb{E}[\mathcal{A}f(Z)] = 0$ pour toute f bornée.
2. Montrer que si pour une variable aléatoire W non négative, $\mathbb{E}[\mathcal{A}f(W)] = 0$ pour toute $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, alors $W \sim \text{Geom}(p)$.

Indication : Pour 2., vous pouvez considérer la fonction $f(k) = \mathbb{1}_{\{k=j\}}$ pour chaque $j \in \mathbb{N}_0$.

Exercice 5.

On considère le modèle $G_{n,p}$ pour $p = 1/2$. On pose pour $n, k \in \mathbb{N}$

$$g(n, k) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

1. Montrer que $G_{n,1/2}$ a la loi uniforme parmi tous les graphes sur $\{1, \dots, n\}$.
2. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n, k_n) = 0$ pour une suite $(k_n)_n \subset \mathbb{N}$, alors la probabilité qu'on a au moins une copie du graphe complet K_{k_n} à k_n sommets dans $G_{n,1/2}$ converge vers 0.
3. Supposons maintenant que $g(n, k_n) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que la probabilité qu'on a au moins une copie du graphe complet K_{k_n} dans $G_{n,1/2}$ converge vers 1.

Indication : Appliquer la méthode du second moment. Vous pouvez utiliser sans preuve le fait que

$$\sum_{i=2}^{k_n-1} \frac{\binom{k_n}{i} \binom{n-k_n}{k_n-i}}{\binom{n}{k_n}} 2^{\binom{i}{2}} = o(1).$$

4. Soit $k_0(n)$ le plus grand k tel que $g(n, k) \geq 1$. On veut montrer que $k_0(n) \sim 2 \log_2(n)$ quand $n \rightarrow \infty$. Suivre les étapes suivantes : a) Montrer que pour chaque $\epsilon > 0$,

$$g(n, \lfloor (1 - \epsilon)2 \log_2(n) \rfloor) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \quad g(n, \lfloor (1 + \epsilon)2 \log_2(n) \rfloor) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

b) Conclure par un argument de monotonie.

5. Le nombre de clique d'un graphe est le plus grand k tel que le graphe contient une copie de K_k . Montrer que la probabilité que le nombre de clique de $G_{n,1/2}$ est contenu dans $\{k_0(n) - 1, k_0(n), k_0(n) + 1\}$ converge vers 1.

Indication : Utiliser 4.

6. Rappelons que le nombre chromatique $\chi(G)$ désigne le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier chaque sommet d'un graphe G de façon que deux sommets adjacents quelconques soient de couleurs différentes. Montrer que la probabilité que

$$\chi(G_{n,1/2}) \geq \frac{n}{k_0(n) + 1}$$

tend vers 1.

Indication : Regarder le complémentaire $G'_{n,1/2}$ de $G_{n,1/2}$, où une arête e est présente si et seulement si elle n'apparaît pas dans $G_{n,1/2}$.