ENS de Lyon — Graphes aléatoires

Master 1 Mathématiques 2016-2017 — E. Baur & M. Maazoun

Partiel 10 Mars 2017

On considère toujours le modèle $G_{n,p}$, où $p = p(n) \in (0, 1)$.

Exercice 1. *Degré d'un sommet fixé*

On suppose que $p = c/n$ avec $c > 0$ fixé. Montrer que le degré d'un sommet v fixé dans $G_{n,p}$ converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers une loi de Poisson de paramètre c.

Exercice 2. *Coefficient d'agglomération*

Calculer le coefficient d'agglomération of $G = G_{n,p}$ défini comme

$$\mathcal{CC}_G = \frac{\mathbb{E}[\Delta_G]}{\mathbb{E}[W_G]},$$

où

$$W_G = \sum_{\substack{u,v,w \in V(G_{n,p}),\\ u \neq w}} \mathbb{1}_{\{u\sim v, v\sim w\}}, \quad \Delta_G = \sum_{u,v,w \in V(G_{n,p})} \mathbb{1}_{\{u\sim v, v\sim w, u\sim w\}},$$

et $u \sim v$ signifie que u et v sont reliés par une arête de $G_{n,p}$.

N.B. : Le coefficient d'agglomération mesure à quel point les voisins d'un sommet sont eux-mêmes voisins.

Exercice 3. *Limites de W_G et Δ_G*

On suppose que $p = c/n$, $c > 0$. Rappelons les définitions de W_G et Δ_G données dans l'Exercice 2.

1. En utilisant la méthode du second moment, montrer que

$$\frac{W_G}{n} \xrightarrow{n\to\infty} c^2 \quad \text{en probabilité.}$$

2. Montrer que

$$\frac{n\Delta_G}{W_G} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{6}{c^2}\,\text{Poisson}(c^3/6) \quad \text{en loi.}$$

   Indication : Vous pouvez utiliser le résultat du TD 6 qui montre que le nombre de triangles converge en loi vers une variable de Poisson.

Exercice 4. *Fonction seuil pour les cycles*

Montrer que la fonction $p^*(n) = 1/n$ est une fonction seuil pour l'existence d'un cycle dans $G_{n,p}$.

Exercice 5. *Nombre de sommets de degré d : part 1*

Soit $d \geq 1$. On dénomme $X_d = X_{n,d}$ le nombre de sommets de degré d dans $G_{n,p}$. Montrer que $X_d \xrightarrow{n\to\infty} 0$ en probabilité dans les cas suivants :

1. si $p \ll n^{-(d+1)/d}$;
2. si $pn - \log n - d \log\log n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Exercice 6. *Nombre de sommets de degré d : part 2*

On définit X_d comme dans l'Exercice 5, et on suppose maintenant que $d \geq 2$. Si $p \sim \alpha n^{-(d+1)/d}$ pour un certain $\alpha > 0$, on veut montrer que

$$X_d \xrightarrow{n\to\infty} \text{Poisson}(\alpha^d/d!)$$

en loi. Pour cela on va calculer la limite des moments factoriels et utiliser le Théorème 5 du cours.

1. Calculer l'espérance du nombre de suites de ℓ sommets distincts qui sont tous de degré d et sans arêtes entre eux.
2. On fixe une ensemble X de ℓ sommets et $j \in [\![1, \lfloor d\ell/2 \rfloor]\!]$. Majorer la probabilité de l'évènement suivant :

   $$\{\text{il y a } \ell d - j \text{ arêtes incidentes à } X \text{ dont } j \text{ entre deux sommets de } X\}$$

   par un $o(n^{-\ell})$.
3. Conclure.

Qu'est-ce qui se passe pour $d = 1$?