ENS de Lyon
Master 1 Mathématiques 2016-2017

Graphes aléatoires

E. Baur & M. Maazoun

Corrigé Partiel 10 Mars 2017

1 Exercice 1

Le degré d'un sommet v fixé dans $G_{n,p}$ a une loi binomiale de paramètres $n-1$ et p. En consequence, on a pour $k = 0, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\deg(v) = k) &= \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = \frac{n^k}{k!}(1+O(1/n))\frac{c^k}{n^k}\exp\left(-c+O(1/n)\right) \\ &\sim \frac{c^k}{k!}e^{-c} = \mathbb{P}\left(\text{Poisson}(c) = k\right).\end{aligned}$$

2 Exercice 2

On a $\mathbb{E}[\Delta_G] = n(n-1)(n-2)p^3$, $\mathbb{E}[W_G] = n(n-1)(n-2)p^2$, et donc $\mathcal{CC}_G = p$.

3 Exercice 3

1) On voit que $\mathbb{E}[W_G] \sim c^2 n$, et $\text{Var}(W_G) = O(n^4p^3) = O(n)$. En particulier, $\text{Var}(W_G) = o(\mathbb{E}[W_G]^2)$, et donc avec Tchébychev

$$\frac{W_G}{\mathbb{E}[W_G]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{en probabilité.}$$

On en déduit 1).
2) Il faut observer que $\Delta_G = 6\times$ le nombre de triangles dans $G_{n,p}$. En applicant le resultat sur les triangles du TD 6, on obtient

$$\Delta_G \xrightarrow[n\to\infty]{} 6\,\text{Poisson}(c^3/6) \quad \text{en loi.}$$

On déduit de la première partie que $n/W_G \to 1/c^2$ en probabilité. En combinaison avec 1), le théorème de Slutsky montre que

$$\frac{n\Delta_G}{W_G} = \Delta_G \times \frac{n}{W_G} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{6}{c^2}\,\text{Poisson}(c^3/6) \quad \text{en loi.}$$

4 Exercice 4

Supposons tout d'abord que $p \ll 1/n$. Soit Z le nombre de cycles dans $G_{n,p}$. La méthode du premier moment donne

$$\mathbb{P}(Z > 0) \leq \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{2k} p^k \leq \sum_{k=3}^{n} (np)^k = o(1).$$

Supposons maintenant que $p \gg 1/n$. C'est très facile si on se souvient du résultat de l'Exercice 3, TD 1 :

$$\mathbb{P}(Z > 0) \geq \mathbb{P}(G_{n,p} \text{ contient au moins un triangle}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Deuxième possibilité : On sait que le nombre d'arêtes $|E(G_{n,p})|$ suit la loi binomiale de paramètres $\binom{n}{2}$ et p, et donc

$$\mathbb{E}\left[|E(G_{n,p})|\right] = \frac{n(n-1)}{2} p, \quad \mathrm{Var}(|E(G_{n,p})|) = \frac{n(n-1)}{2} p(1-p).$$

Écrivons $p = f(n)/n$ pour une fonction $f(n) \to \infty$, il faut simplement observer que

$$\mathbb{P}(Z > 0) \geq \mathbb{P}\left(|E(G_{n,p})| \geq n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(|E(G_{n,p})| < n\right),$$

et, pour n suffisament grand,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|E(G_{n,p})| < n\right) &\leq \mathbb{P}\left(\big||E(G_{n,p})| - \mathbb{E}\left[|E(G_{n,p})|\right]\big| > (1/3) f(n) n\right) \\ &\leq \frac{9\mathrm{Var}(|E(G_{n,p})|)}{f^2(n) n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

5 Exercice 5

On a

$$\mathbb{E}[X_d] = n \binom{n-1}{d} p^d (1-p)^{n-1-d}.$$

1) Si $p \ll n^{-(d+1)/d}$, alors $\mathbb{E}[X_d] \leq n^{d+1} p^d \to 0$.
2) Si $pn - \log n - d \log\log n \to \infty$, c'est à dire

$$p = \frac{1}{n}\left(\log n + d \log\log n + f(n)\right)$$

pour une fonction $f(n) \to \infty$, on a pour n grand

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_d] &\leq n^{d+1} \left(\frac{2\log n}{n}\right)^d \exp\left((n-d)\log(1-p)\right) \\ &= 2^d n (\log n)^d \exp\left(-(\log n + d\log\log n + f(n)) + O((\log n)^2/n)\right) \\ &\leq e^{-(1/2) f(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

6 Exercice 6

1. On calcule l'espérance du nombre $X^0_{\ell,d}$ de suites de ℓ sommets distincts de degré d sans arêtes entre eux. Soit $(n)_\ell = n(n-1)\cdots(n-\ell+1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^0_{\ell,d}] &= (n)_\ell \binom{n-\ell}{d}^\ell p^{\ell d}(1-p)^{\ell(n-1-d)-\binom{\ell}{2}} \\ &\sim \frac{n^{\ell(d+1)}}{(d!)^\ell}(\alpha n^{-(d+1)/d})^{\ell d} \to \left(\frac{\alpha^d}{d!}\right)^\ell.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{il y a } \ell d - j \text{ arêtes incidentes à } X \text{ dont } j \text{ entre deux sommets de } X) \\ &= \binom{\binom{\ell}{2}}{j}\binom{\ell(n-\ell)}{\ell d - 2j} p^{\ell d - j}(1-p)^{\text{quelque chose}} \\ &= O\left(n^{\ell d - 2j}(n^{-(d+1)/d})^{\ell d - j}\right) = O(n^{-\ell - j(1-1/d)}) = o(n^{-\ell}).\end{aligned}$$

3. Soit $X^j_{\ell,d}$ le nombre de suites de ℓ sommets distincts tous de degré d, avec j arêtes entre eux. On a

$$\mathbb{E}[(X_d)_\ell] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{\lfloor d\ell/2\rfloor} X^j_{\ell,d}\right].$$

   On a déjà vu que $\mathbb{E}[X^0_{\ell,d}] \to \left(\frac{\alpha^d}{d!}\right)^\ell$, et pour $j \geq 1$, il suffit de remarquer que pour un ensemble X de ℓ sommets, être compté dans $X^j_{\ell,d}$ implique l'évènement estimé à la Question 2. On déduit

$$\mathbb{E}[X^j_{\ell,d}] = (n)_\ell \, o(n^{-\ell}) = o(1).$$

   D'où la convergence $\mathbb{E}[(X_d)_\ell] \to \frac{\alpha^d}{d!}$, ce qui implique la convergence Poissonienne voulue par le Théorème 5 du cours.

Pour $d = 1$, on se retrouve avec $p = \alpha n^{-2}$. Dans ce cas le nombre d'arêtes converge en distribution vers Poisson$(\alpha/2)$. D'autre part avec grande probabilité il n'y a que des sommets de degré 1, c'est-à-dire que toutes les arêtes sont isolées. Dans ce cas le nombre de sommets de degré 1 est égal à deux fois le nombre d'arêtes. On déduit $X_d \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\text{Poisson}(\alpha/2)$ en loi.